Aufgaben zur Diskussion ganzrationaler Funktionen

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x)=-\frac{1}{9}x^4+\frac{4}{3}x^2-3$ mit $D_f=\mathbb{R}$. (Abitur 2011 AII)

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_f an.

1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Intervallen, in denen der Graph der Funktion f recht- bzw. linksgekrümmt ist und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

1.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-3{,}5 \le x \le 3{,}5$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

2.0 f sei eine ganzrationale Funktion mit der Ableitungsfunktion

$f'(x)=\frac{1}{2}(x-6)(x-2)$ und $D_{f'}=D_f=\mathbb{R}$. (Abitur 2012 AI)

2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f´ an, skizzieren Sie den Graphen von f´ und ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f.

2.2 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen G_f.

3.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x)=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2$ mit $D_f=\mathbb{R}$. (Abitur 2012 AII)

3.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und deren Vielfachheit.

3.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunkts von G_f.

3.3 Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Wendepunkte.

3.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-4 \le x \le 2$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.

3.5 Zeigen Sie, dass die Gerade G_t, beschrieben durch die Funktion
$t: x \mapsto -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ mit $D_t = \mathbb{R}$, Tangente an G_f im Punkt $P(-2/y_P)$ ist.
Zeichnen Sie die Tangente in das vorhandene Koordinatensystem ein.

4.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{1}{12}\left(x^3 - 2ax^2 + a^2x\right)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a \ge 0$. (Abitur 2013 AI)

4.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a und deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a.

4.2 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a Art und Koordinaten der Punkte des Graphen von f_a mit waagrechter Tangente.

Für alle folgenden Teilaufgaben ist a = 6: $f_6(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$.

4.3 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_f.

4.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f für $-1 \le x \le 8$ in ein Koordinatensystem.

4.5 Gegeben ist weiterhin die Ursprungsgerade G_g, welche den Graphen G_f im Hochpunkt $HP(2/y_{HP})$ schneidet. Zeichnen Sie die Gerade in das vorhandene Koordinatensystem ein und bestimmen Sie ihre Gleichung.

5.0 Von einer ganzrationalen Funktion k mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$ ist Folgendes bekannt:
$k''(x) > 0$ für $x \in \left]-\infty; -2\right[$ sowie für $x \in \left]0; \infty\right[$
$k''(x) < 0$ für $x \in \left]-2; 0\right[$
$k'(0) = 0 \wedge k''(0) = 0 \wedge k'''(0) \ne 0$
(Abitur 2013 AI)

5.1 Beschreiben Sie die daraus resultierenden Eigenschaften des Graphen G_k in Worten.

5.2 Fertigen Sie mithilfe der bisherigen Angaben und Ergebnisse eine aussagekräftige Skizze von G_k an, wenn der Graph durch den Ursprung verläuft, einen Tiefpunkt bei $x = -3$ besitzt und die Funktion k den Grad 4 hat.

Jochen Weber

6.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{4}\left(x^3 - 4x^2 - 2x + 8\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. (Abitur 2014 AI)

6.1 Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Begründen Sie dann ohne weitere Rechnung, dass in den Intervallen $\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$ sowie $\left]\sqrt{2};4\right[$ jeweils eine Extremstelle liegt. Geben Sie auch deren Art an.

6.2 Berechnen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

6.3 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph G_f rechts- bzw. linksgekrümmt ist, sowie die Koordinaten des Wendepunktes.

6.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \le x \le 4{,}5$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem.

6.5 Die Gerade G_t enthält die Schnittpunkte des Graphen G_f mit der y-Achse und mit der x-Achse bei $x = 4$. Zeigen Sie, dass die Gerade G_t Tangente an G_f ist und zeichnen Sie G_t in das vorhandene Koordinatensystem ein.

6.6 Gegeben ist zusätzlich die Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$ und es gilt:

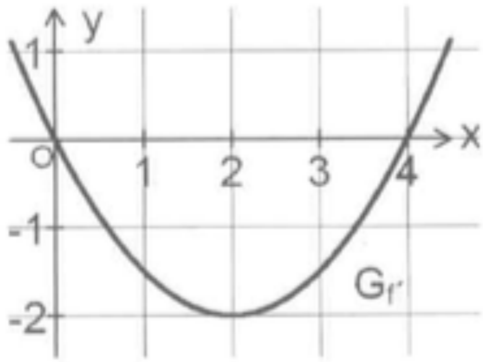
$$f(x) - p(x) = -\frac{1}{4}\left(x^3 - 5x^2\right).$$

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f - p$ mit deren Vielfachheit und erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieser Stellen für die Graphen der beiden Funktionen.

7 Gegeben ist die allgemeine ganzrationale Funktion u vierten Grades durch $u(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a,b,c,d,e,x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Geben Sie ohne Begründung und ohne Rechnung einen Überblick, wie viele Nullstellen (Anzahl und Vielfachheit !) die Funktion u haben kann. (Abitur 2014 AII)

Jochen Weber

8.0 Untenstehende Abbildung zeigt den Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion einer in ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Alle im Folgenden zu entnehmenden Werte sind ganzzahlig. (Abitur 2015 AI)



8.1 Geben Sie nur mit Hilfe des Graphen $G_{f'}$ die maximalen Monotonieintervalle und die Wendestelle des Graphen der Funktion f an. Begründen Sie das Vorliegen der Wendestelle hinreichend.

8.2 Gegeben ist nun die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{6}\left(x^3-6x^2\right)$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit und ermitteln Sie unter Verwendung vorliegender Ergebnisse Art und Koordinaten der Extrempunkte und den Wendepunkt des Graphen G_f.

8.3 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und f´im Bereich $-2 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

9.0 Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen
$f_a: x \mapsto a\cdot\left(x^3+2x^2-7x+4\right)$ mit $D_{f_a}=\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$ und $a>0$. (Abitur 2015 AII)

9.1 Zerlegen Sie $f_a(x)$ in Linearfaktoren und geben Sie die Nullstellen der Funktion f_a mit der jeweiligen Vielfachheit an.

9.2 Berechnen Sie den Wert von a so, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f_a an der Stelle x = -3 die y-Achse bei y = 5 schneidet.

Nun wird $a=\frac{1}{8}$ gesetzt. Die Funktion $f_{\frac{1}{8}}$ wird im Folgenden mit f bezeichnet.

Es gilt: $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3+2x^2-7x+4\right)$.

9.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

9.4 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem der Graph der Funktion f am stärksten fällt.

9.5 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen von f im Bereich -5 ≤ x ≤ 4 in ein kartesisches Koordinatensystem.

10.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{4}\left(x^3+8x^2+16x\right)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2016 AI)

10.1 Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f mit jeweiliger Vielfachheit.

10.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f.

10.3 Berechnen Sie die maximale positive Steigung des Graphen G_f.

10.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich -6 ≤ x ≤ 1 unter Kennzeichnung bisheriger Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

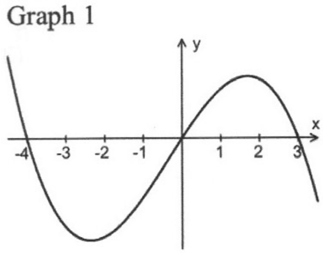
11.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $h_t: x \mapsto \frac{1}{4}x(tx-1)(x+4)(x-3)$

mit $D_{h_t} = \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$. (Abitur 2016 AI)

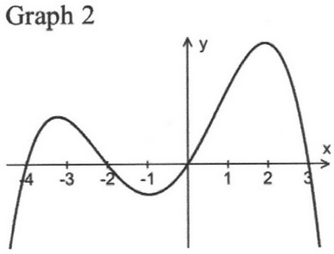
11.1 Bestimmen Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion h_t in Abhängigkeit von t.

11.2 Begründen Sie, welche der im Folgenden dargestellten Graphen zur Funktionenschar h_t gehören können und welche nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung mithilfe der ganzzahligen Nullstellen und ggf. des Grenzverhaltens bzw. des Leitkoeffizienten. Geben Sie für den Fall, dass der Graph zur Funktionenschar h_t gehört, den zutreffenden Wert von t an.

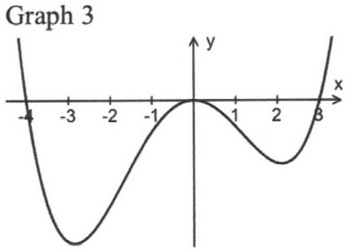
Graph 1



Graph 2



Graph 3



12.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{16}(x+3)(x+\frac{4}{3})(4-x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$. (Abitur 2016 AII)

12.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

12.2 Zeigen Sie, dass sich f(x) auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{16}(3x^3 + x^2 - 40x - 48)$ darstellen lässt.

12.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f.

12.4 Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

12.5 Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Schnittpunkt mit der y-Achse. Bestimmen Sie dann den Bereich, in dem die Steigung des Graphen G_f größer ist als die berechnete Tangentensteigung.

13.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{10}\left(-x^3 + 15x^2 - 56x + 12\right)$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2017 AI)

13.1 Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.

13.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Koordinaten auf eine Nachkommastelle.

13.3 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f.

13.4 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen G_f im Bereich $-1 \leq x \leq 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

14.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x^4 - 6x^2\right)$ und $D_f = \mathbb{R}$, die bei $W(1|2,5)$ einen Wendepunkt besitzt. (Abitur 2017 AII)

14.1 Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Erklären Sie die Bedeutung der Vielfachheit dieser Nullstellen für den Graphen G_f.

14.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f.

14.3 Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph G_f genau zwei Wendepunkte besitzt und geben Sie die Koordinaten des zweiten Wendepunkts an. Berechnen Sie auch die x-Koordinaten sämtlicher Punkte von G_f, welche die gleichen y-Koordinaten wie die Wendepunkte haben.

14.4 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen G_f im Bereich $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich $-5 \le y \le 5$ benötigt.
Maßstab: 1 LE = 1 cm.

14.5 Zeigen Sie, dass an der Stelle $x = -2$ die Gleichung $f(x) - f'(x) = 0$ gilt und bestimmen Sie alle weiteren Stellen mit dieser Eigenschaft. Erklären Sie, was das Ergebnis für den Graphen G_f bedeutet.

14.6 Geben Sie exakt die Nullstellen und die Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion f' an und zeichnen Sie den Graphen $G_{f'}$ im Bereich $-2 \le x \le 2$ in das vorhandene Koordinatensystem mit Farbe ein.

15 Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ist der Graph G_h einer ganzrationalen Funktion h symmetrisch zur y-Achse, dann ist der Graph $G_{h'}$ der ersten Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung. (Abitur 2017 AII)

16.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{9}\left(-x^4 + 4x^3\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2018 AI)

16.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit.

16.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen G_f.

16.3 Ermitteln Sie die Gleichungen aller Wendetangenten an den Graphen G_f.

16.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich $-3 \le y \le 3$ benötigt. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

16.5.0 Betrachtet wird nun die quadratische Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_p bezeichnet.

16.5.1 Die Parabel G_p berührt den Graphen G_f aus 16.0 im Punkt B(3/3) und verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie p(x) und zeichnen Sie die Parabel G_p im Bereich $-1 \le x \le 4$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

(Mögliches Ergebnis: $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$)

16.5.2 Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunktes der Graphen G_f und G_p, der im III. Quadranten des Koordinatensystems liegt.

16.5.3 Bestimmen Sie die Steigungen der beiden Geraden durch den Punkt T(3/4), die den Graphen G_p berühren.

17.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{5}\left(x^4 - 8x^3 + 18x^2\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
Der Graph wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2018 AII)

17.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f bezüglich des Koordinatensystems und geben Sie das Verhalten von f(x) für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$ an.

17.2 Zeigen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt und geben Sie diese samt Vielfachheit an.

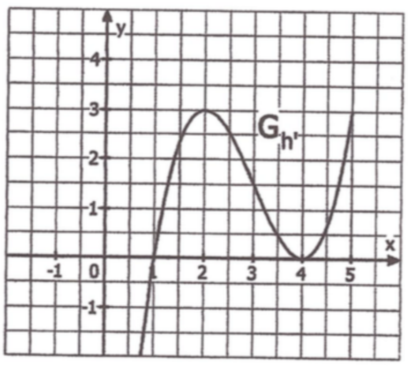
17.3 Begründen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 17.1 und 17.2, dass an der Stelle x = 0 ein relatives und zugleich absolutes Minimum von f vorliegen muss.

17.4 Zeigen Sie, dass an den Stellen x = 1 und x = 3 Wendestellen von f liegen. Ermitteln Sie auch die Koordinaten der zugehörigen Punkte und welcher der beiden Punkte ein Terrassenpunkt ist.

17.5 Die Wendepunkte aus Teilaufgabe 17.4 legen die Gerade G_g fest.
Ermitteln Sie deren Gleichung.

17.6 Zeichnen Sie den Graphen G_f und G_g unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \le x \le 4{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

18 Gegeben ist der Graph der 1. Ableitung h´ der Funktion h mit der Definitionsmenge



$D_h = \mathbb{R}$. (Abitur 2018 AII)

Bestätigen oder widerlegen Sie begründet folgende Aussagen:

a) G_h hat einen Tiefpunkt bei x = 1.
b) G_h hat einen Tiefpunkt bei x = 4.
c) G_h hat einen Wendepunkt bei x = 2.
d) Die Tangente an den Graphen G_h in x = 2 verläuft parallel zur Geraden e mit der Gleichung $y = 3x + 7$.

19 Gegeben sind die reellen Funktionen $k_a : x \mapsto \frac{1}{9}\left(x^4 - 2ax^3\right)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte der zugehörigen Graphen G_{k_a} in Abhängigkeit von a. (Abitur 2018 AII)

20.0 Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle x = -2. (Abitur 2019 Teil 1)

20.1 Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von f einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$ an.

20.2 Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion f' mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion f', die Lage des Extrempunktes und das Symmetrieverhalten des Graphen $G_{f'}$ an.

21.0 Für eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

I. $f(0) = 0$ II. $f'(0) = 0$

III. $f(-3) = -3$ IV. $f'(-3) = -1$

Der zugehörige Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

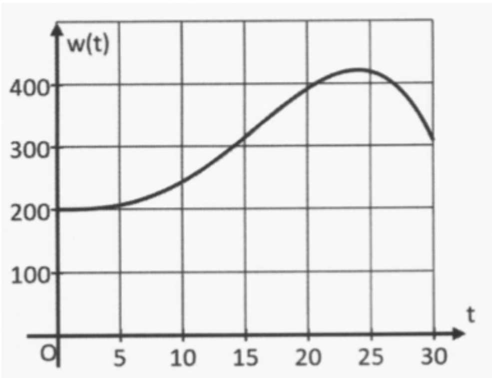
(Abitur 2019 Teil 2 AI)

21.1 Beschreiben Sie in Worten, welche Eigenschaften der Graph von f aufgrund obiger Gleichungen hat.

21.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

(Mögliches Teilergebnis: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$)

22.0 Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion w mit der Funktionsgleichung $w(t)=at^4+bt^3+c$ mit geeigneten Werten $a,b,c\in\mathbb{R}$ und der Definitionsmenge $D_w=\left[0;30\right]$ beschrieben werden.
Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt $t_0=0$.
Der Funktionswert w(t) gibt den Wasserstand des Flusses in cm an.
Zu Monatsbeginn lag der Wasserstand bei 200 cm und am Monatsende bei 308 cm.
Der höchste Wasserstand wurde am 25. März – also zum Zeitpunkt $t_{max}=24$ - gemessen.
Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand w(t) in Abhängigkeit von der Zeit t.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.
Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.
(Abitur 2019 Teil 2 AII)



22.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b und c und damit die zugehörige Funktionsgleichung von w.
(mögliches Ergebnis: $w(t)=-\frac{1}{500}\left(t^4-32t^3-100000\right)$)

22.2 Berechnen Sie den höchsten Pegel im Beobachtungszeitraum zentimetergenau.

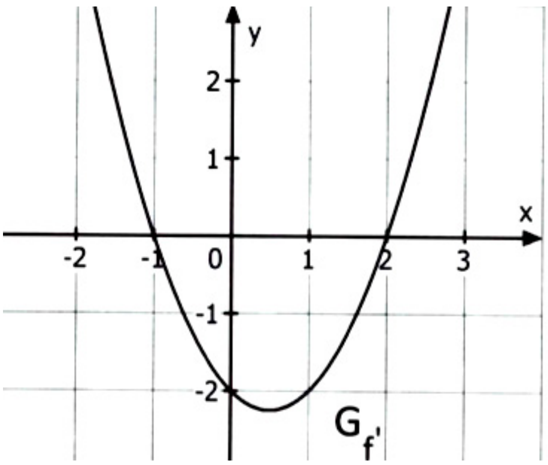
22.3 Ermitteln Sie rechnerisch das Datum im Beobachtungszeitraum, an dem die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten war.

23.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto x^3 + 3x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.
Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.
(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

23.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen G_g mit der x-Achse.

23.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente des Graphen G_g.

24.0 In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise eine Parabel. Diese ist der Graph der Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
(Abitur 2020 Teil 1)



24.1 Leiten Sie nachvollziehbar aus dem Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion f' die Lage und Art der lokalen Extremstellen von f ab. Begründen Sie, weshalb die relativen Extrempunkte des Graphen von f nicht absolut sein können.

24.2 Bestimmen Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ die Lage der Wendestellen von f und entscheiden Sie begründet, ob die Wendetangente des Graphen der Funktion f steigt oder fällt.

25 h sei eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.
Für die zugehörige erste Ableitungsfunktion gilt die Funktionsgleichung $h'(x) = x^2 + 1$.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h' und begründen Sie damit, dass der Graph der Funktion h genau eine Nullstelle besitzt. Geben Sie außerdem einen möglichen Funktionsterm für h an. (Abitur 2020 Teil 1)

26 Eine ganzrationale Funktion g habe höchstens den Grad fünf.
Die Tabelle zeigt das Krümmungsverhalten des Graphen G_g.

$x \in$	$]-\infty;1]$	$[1;4]$	$[4;\infty[$
G_g	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

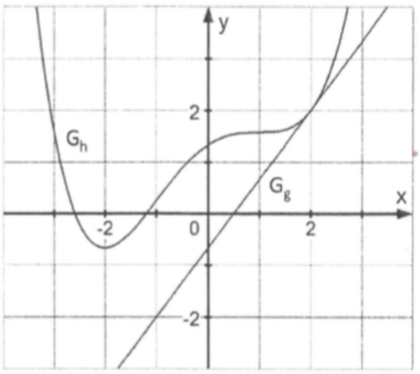
Geben Sie die Wendestellen der Funktion g an und argumentieren Sie, welchen Grad g nur haben kann. (Abitur 2020 Teil 1)

27.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x^3 - 3x - 2\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
(Abitur 2020 Nachtermin Teil 1)

27.1 Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen.

27.2 Die Funktion f besitzt eine doppelte und eine einfache Nullstelle (Nachweis nicht erforderlich).
Begründen Sie mithilfe einer Skizze des Graphen von f, dass die erste Ableitungsfunktion f' zwei einfache Nullstellen besitzt.

28 Die untenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt der Graphen der in der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$ definierten Funktionen h und g. h ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und G_g ist die Tangente an G_h im Punkt $(2|2)$.
(Abitur 2020 Nachtermin Teil 1)

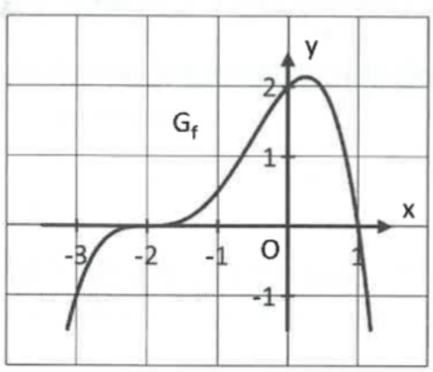


Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, indem Sie der Abbildung geeignete Informationen entnehmen.

A: $h(x) = 0{,}1 \cdot (x+3) \cdot (x-1)^3 + 1$ ist eine mögliche Funktionsgleichung von h.

B: $h'(2) > 2$

29.0 In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
(Abitur 2021 Teil 1)



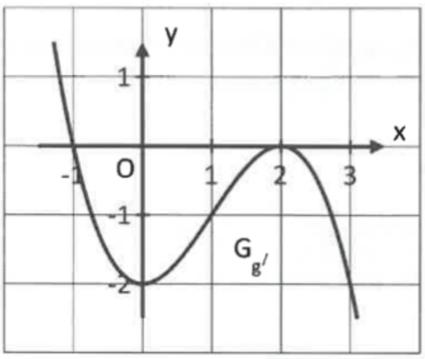
29.1 Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f sowie jeweils deren Vielfachheit an. Bestimmen Sie mithilfe dieser Nullstellen einer Funktionsgleichung der Funktion f. Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.

29.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen G_f, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a) $f'(0) = -\frac{1}{2}$ b) $f''(1) < 0$

c) $f''(-2) = f'(-2)$ d) $W_f = \mathbb{R}$

30.0 g ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.
In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen der Ableitungsfunktion g'.



30.1 Geben Sie die Stellen an, an welchen der Graph der Funktion g Punkte mit horizontaler Tangente hat und benennen Sie jeweils die Art dieser Graphenpunkte.

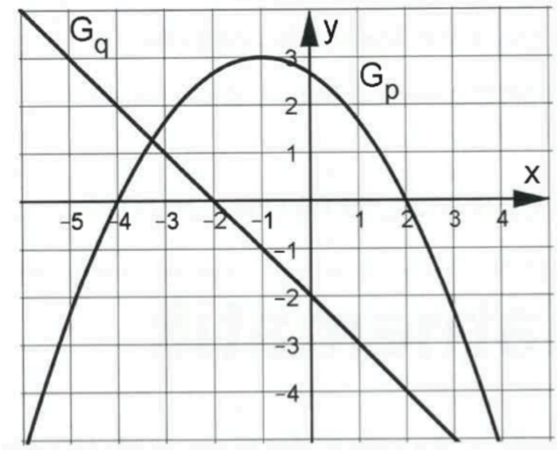
30.2 Geben Sie mit Begründung die Wendestellen der Funktion g an.

31.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f: x \mapsto -1{,}5x^3 + 2x + 1$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
(Abitur 2021 AI)

31.1 Bestimmen Sie jeweils Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f und begründen Sie, warum f nur eine einfache Nullstelle besitzt.

31.2 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Wendetangente t mit $t(x) = 2x + 1$ mit $D_t = \mathbb{R}$ im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

32 In der folgenden Grafik sind Ausschnitte der Geraden G_q und der Parabel G_p abgebildet. Kreuzen Sie diejenigen Funktionsterme an, die zu G_q bzw. G_p gehören.



	$\frac{1}{4}(x+1)^2 + 3$
	$-\frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$
	$-\frac{1}{3}(x-2)(x+4)$
	$-\frac{1}{4}(x+2)(x-4)$
	$-\frac{1}{4}x^2 - 4x + 2$
	$-2x - 2$
	$-\frac{1}{2}(x+2)$
	$2 - x$
	$-x - 2$
	$x + 2$

33 Geben Sie die Wertemenge der Funktion $a: x \mapsto -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 2$ mit $D_a = [0;4]$ und die Wertemenge der Funktion $b: x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 - 4)^2$ mit $D_b = \mathbb{R}$ an.

34 Bei einer ganzrationalen Funktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ ist bekannt:
$h(1) = 0;\ h(2) = 1;\ h'(1) = 0;\ h''(1) = 2;\ h''(2) = 0;\ h'''(2) = 1$.
Begründen Sie, welche besonderen Punkte der Graph von h an den Stellen x = 1 und x = 2 besitzt.

35 Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: „Es gibt eine in ganz $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph genau einen Wendepunkt hat.“

36.0 Gegeben ist die Funktion f $f: x \mapsto \frac{1}{9}\cdot\left(x^2-9\right)\left(x^2+1\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

36.1 Untersuchen Sie G_f hinsichtlich einer Symmetrie zum Koordinatensystem und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte der Funktion f für $x \to \pm\infty$ an.

36.2 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und geben Sie die Bereiche an, in denen G_f oberhalb der x-Achse verläuft.

36.3 Die Funktion f kann durch die Funktionsgleichung $f(x)=\frac{1}{9}\cdot\left(x^4-8x^2-9\right)$ dargestellt werden (Nachweis ist nicht erforderlich). Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f und geben Sie die Wertemenge von f an.

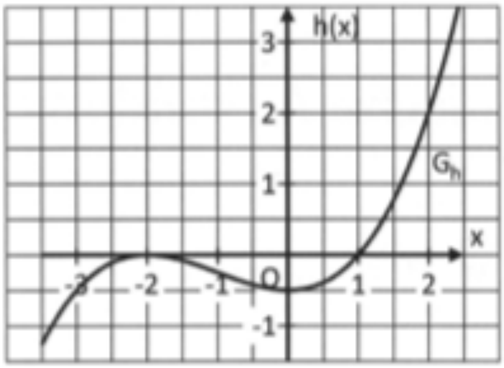
37.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x)=x^3-2x^2+3$ mit der Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}$ und zusätzlich die Funktion $q: x \mapsto -x^2+2x+3$ mit $D_q=\mathbb{R}$.

37.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem G_f am stärksten fällt.

37.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f und G_q.

37.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse G_f für $-1{,}5 \le x \le 2{,}5$ und G_q für $-1{,}5 \le x \le 3{,}5$ in ein gemeinsames kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

38 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. (Abitur 2022 Teil 1)



Entscheiden Sie anhand des Graphen G_h, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
Die Nullstellen und die Extremstellen von h sind ganzzahlig und können der Abbildung entnommen werden.

a) Es gilt: $h'(x) < 0$ für $x \in \left]-2;1\right[$

b) Der Graph der Stammfunktion H von h besitzt einen Terrassenpunkt.

c) Es gilt: $h(-2) + h'(0) > 0$

39.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2022 AI)

39.1 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Geben Sie die Wertemenge W_f an.

39.2 Berechnen Sie die Wendestellen des Graphen von f und entscheiden Sie begründet, ob es sich dabei um Stellen mit maximaler positiver bzw. maximaler negativer Steigung von G_f handelt oder nicht.

39.3 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -4x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade G_g Tangente an den Graphen G_f an der Stelle x = -2 ist.

39.4 Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

40.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2022 AII)

40.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an.

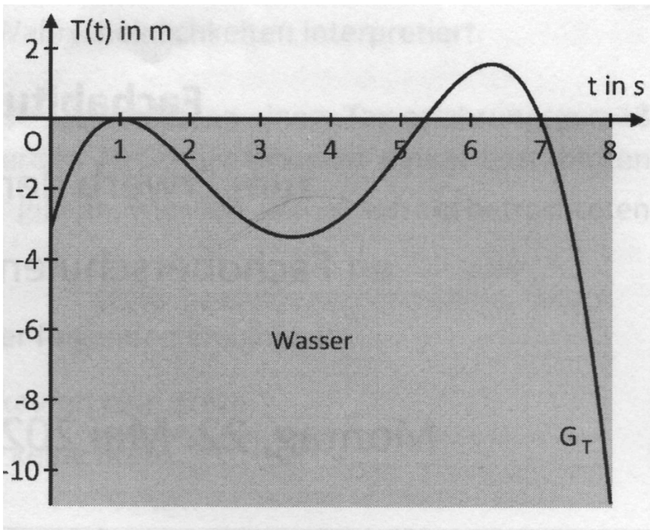
40.2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Funktionsterm f(x) auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{100}(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x)$ darstellen lässt.

40.3 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Geben Sie die Wertemenge W_f an.

(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -\frac{1}{25}(x-3)(x-10)(x-20)$)

40.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $0 \le x \le 24$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

41.0 Das Auf- und Abtauchverhalten eines Delfins im Meer wird mittels eines an ihm angebrachten Sensors untersucht. Die momentane Höhe des Sensors in Metern bezogen auf die Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden lässt sich annähernd durch die Funktionswerte der Funktion T beschreiben. Der Graph der Funktion T wird mit G_T bezeichnet und ist im Zeitraum von 0 bis 8 Sekunden im nebenstehenden Koordinatensystem abgebildet.



Die Funktion T ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ befindet sich der Delfin an der Wasseroberfläche. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2023 AI)

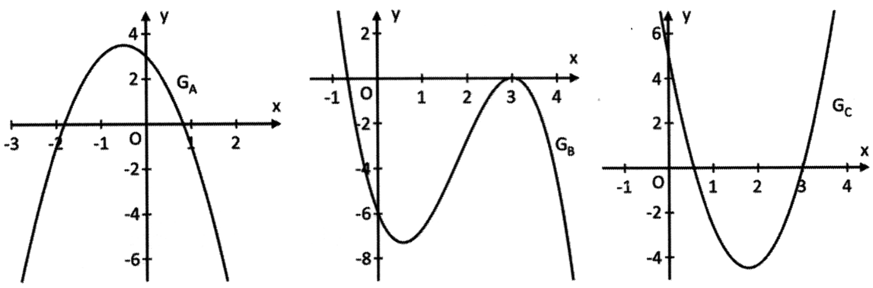
41.1 Beschreiben Sie anhand des Funktionsgraphen G_T den Bewegungsablauf des Delfins im Bereich von $t \approx 5{,}3$ bis $t = 7$ und erläutern Sie, ob für die Funktion T das Intervall $[0;\infty[$ für den beschriebenen Sachverhalt eine sinnvolle Definitionsmenge ist.

41.2 Der Leitkoeffizient im Funktionsterm von T ist gegeben durch $a=-\frac{1}{12}$. Zudem ist bekannt, dass G_T den Schnittpunkt $S\left(0\middle|-\frac{28}{9}\right)$ mit der Ordinatenachse besitzt.
Die zwei ganzzahligen Nullstellen von T können der Zeichnung entnommen werden.
Berechnen Sie den exakten Wert der fehlenden Nullstelle von T.

42.0 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 0{,}5(x-3)^2\left(2x+\frac{4}{3}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_k=\mathbb{R}$.
(Abitur 2024 Teil 1)

42.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion k mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an und bestimmen Sie damit ein Intervall, in dem die x-Koordinate des lokalen Hochpunkts des Graphen der Funktion k liegt.

42.2 In der nachfolgenden Abbildung sind die Ausschnitte der Graphen G_A, G_B und G_C von in ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen dargestellt.
Entscheiden Sie begründet, welcher der drei Graphen G_A, G_B bzw. G_C zur Ableitungsfunktion von k gehört.



43.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4-2x^3-2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2024 AI)

43.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

43.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzt.

43.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-3 \le x \le 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Jochen Weber

44.0 Die Funktion f lässt sich auch in der Form $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-7x^2+8x+16\right)$ mit $D_f=\mathbb{R}$ darstellen. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich. (Abitur 2024 AII)

44.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_g an G_f im Punkt $P\left(0|2\right)$.

44.2 Zeigen Sie, dass in keinem Punkt des Graphen G_f eine Tangente mit der Steigung m = -2 angelegt werden kann.

44.3 Ermitteln Sie die exakten Koordinaten des Wendepunkts von G_f.

Lösungen

1.1

Nullstellen:

$f(x)=0$

Substitution: $z=x^2$

$\Rightarrow -\frac{1}{9}z^2+\frac{4}{3}z-3=0 \quad \Rightarrow z^2-12z+27=0 \quad \Rightarrow (z-3)(z-9)=0$

$\Rightarrow z_1=3 \quad z_2=9$

Resubstitution:

1) $x^2=3 \quad \Rightarrow x_1=-\sqrt{3} \quad x_2=\sqrt{3}$

2) $x^2=9 \quad \Rightarrow x_3=-3 \quad x_4=3$

Symmetrie:

$f(-x)=-\frac{1}{9}(-x)^4+\frac{4}{3}(-x)^2-3=-\frac{1}{9}x^4+\frac{4}{3}x^2-3=f(x)$

$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

1.2

$f'(x)=-\frac{4}{9}x^3+\frac{8}{3}x$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow -\frac{4}{9}x(x^2-6)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-\sqrt{6} \quad x_3=\sqrt{6}$

Skizze von f´:

$\Rightarrow x_1=0$ TP $\quad TP(0/-3)$

$x_2=-\sqrt{6}$ HP $\quad HP(-\sqrt{6}/1)$

$x_3=\sqrt{6}$ HP $\quad HP(\sqrt{6}/1)$

1.3

$$f''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow -\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3} = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 2 \quad \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2}$$

Skizze von f´´:

$\Rightarrow G_f$ rechtsgekrümmt in $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ sowie in $\left[\sqrt{2};\infty\right[$

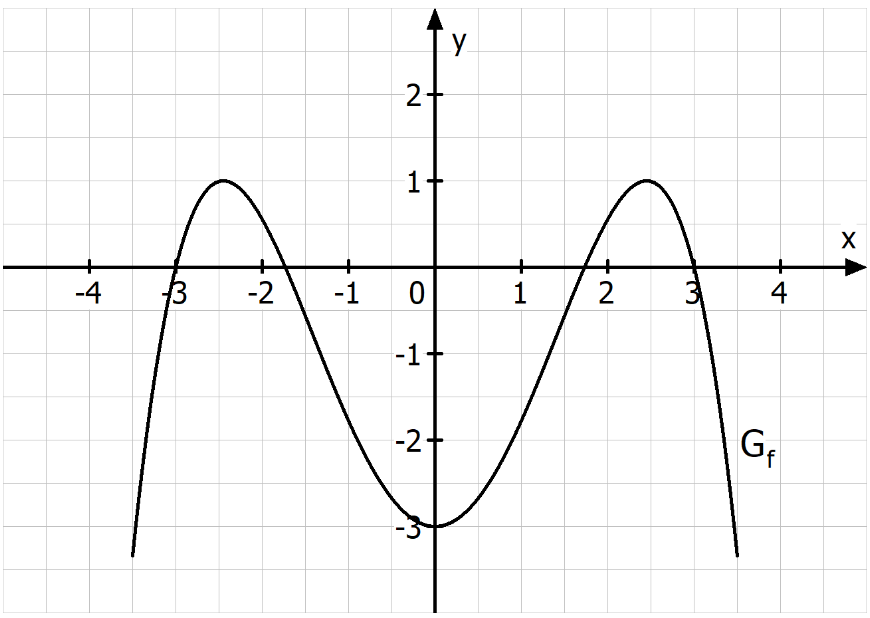
G_f linksgekrümmt in $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$ WP $\quad \Rightarrow WP(-\sqrt{2} / -\frac{7}{9})$

$x_2 = \sqrt{2}$ WP $\quad \Rightarrow WP(\sqrt{2} / -\frac{7}{9})$

1.4

x	-3,5	-3	-2	-1	0	1	2	3	3,5
f(x)	-3,34	0	0,56	-1,78	-3	-1,78	0,56	0	-3,34



2.1

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x-6)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow x_1=6 \quad x_2=2$$

Skizze von f´:

$$\Rightarrow G_f \text{ sms in } \left]-\infty;2\right] \text{ sowie in } \left[6;\infty\right[$$

$$G_f \text{ smf in } \left[2;6\right]$$

2.2

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-8x+12)$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}(2x-8)$$

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow 2x-8=0 \Rightarrow x=4$$

Skizze von f´´:

$$G_f \text{ rechtsgekrümmt in } \left]-\infty;4\right] \quad G_f \text{ linksgekrümmt in } \left[4;\infty\right[$$

3.1

$$f(x)=0 \;\Rightarrow \frac{1}{24}x^2(x^2+8x+24)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \quad x^2+8x+24=0 \;\Rightarrow x_{2/3}=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot 1\cdot 24}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{-32}}{2}$$

$\Rightarrow$ f hat eine Nullstelle bei x = 0 (doppelt);

3.2

$$f'(x)=\frac{1}{6}x^3+x^2+2x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{6}x(x^2+6x+12)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \quad x^2+6x+12=0 \Rightarrow x_{2/3}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot1\cdot12}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-12}}{2}$$

Skizze von f´:

$$\Rightarrow G_f \text{ smf in } \left]-\infty;0\right] \quad G_f \text{ sms in } \left[0;\infty\right[$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ TIP } \Rightarrow \text{TIP}(0/0)$$

3.3

$$f''(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+2$$

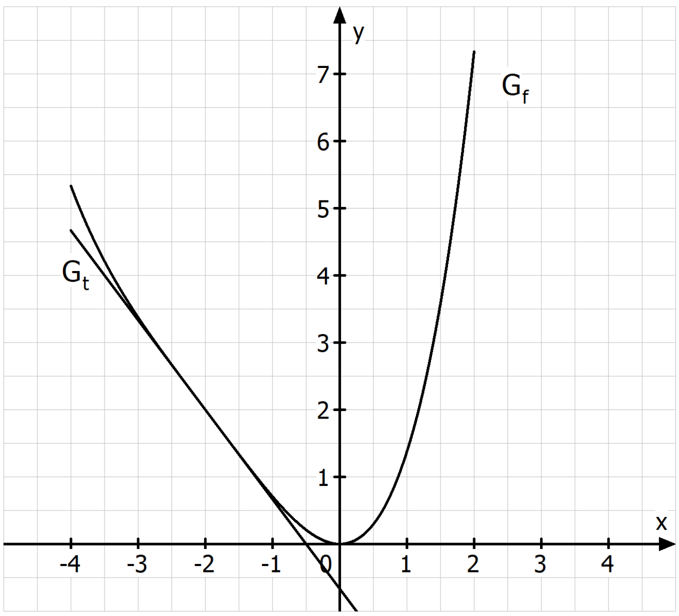
$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2+2x+2=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot\frac{1}{2}\cdot2}}{1}=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{1}=-2$$

Da x = -2 eine doppelte Nullstelle von f´´ ist, kann G_f bei x = -2 keinen WP haben

$\Rightarrow G_f$ hat keinen Wendepunkt;

3.4

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	5,33	3,375	2	0,71	0	1,375	7,33



3.5

$$y_P = f(-2) = \frac{1}{24}(-2)^4 + \frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2 = 2 \;\Rightarrow P(-2/2)$$

$$t: y = mx + t$$

$$m = f'(-2) = \frac{1}{6}(-2)^3 + (-2)^2 + 2(-2) = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 2 = -\frac{4}{3}\cdot(-2) + t \;\Rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow t: y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

4.1

$$f_a(x) = 0 \;\Rightarrow \frac{1}{12}\left(x^3 - 2ax^2 + a^2x\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{12}x\left(x^2 - 2ax + a^2\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \qquad x^2 - 2ax + a^2 = 0 \;\Rightarrow x_{2/3} = a$$

1) $a = 0$: $x = 0$ (dreifache Nullstelle)

2) $a > 0$: $x_1 = 0$ (einfache Nullstelle) $\qquad x_{2/3} = a$ (doppelte Nullstelle)

4.2

$$f_a'(x) = \frac{1}{12}\left(3x^2 - 4ax + a^2\right)$$

$$f_a'(x) = 0 \;\Rightarrow \frac{1}{12}\left(3x^2 - 4ax + a^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4ax + a^2 = 0 \;\Rightarrow x_1 = a \quad x_2 = \frac{1}{3}a$$

Skizze von f_a':

$a = 0$:

$$\Rightarrow x = 0 \text{ TEP} \;\Rightarrow \text{TEP}(0/0)$$

$a > 0$:

$$\Rightarrow x = a \text{ TIP} \;\Rightarrow \text{TIP}(a/0) \qquad x = \frac{1}{3}a \text{ HOP} \;\Rightarrow \text{HOP}\left(\frac{1}{3}a / \frac{1}{81}a^3\right)$$

4.3

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x - 2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

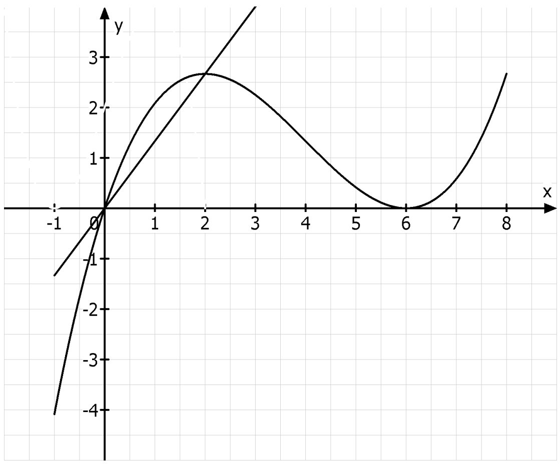
Skizze von f´´:

$$\Rightarrow G_f \text{ ist rechtsgekrümmt in } \left]-\infty;4\right]$$

$$G_f \text{ ist linksgekrümmt in } \left[4;\infty\right[$$

$$\Rightarrow WP(4/\frac{4}{3})$$

4.4



4.5

$$g(x) = mx + t \qquad O(0/0) \quad HOP(2/\frac{8}{3})$$

$$m = \frac{\frac{8}{3} - 0}{2 - 0} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{4}{3}x$$

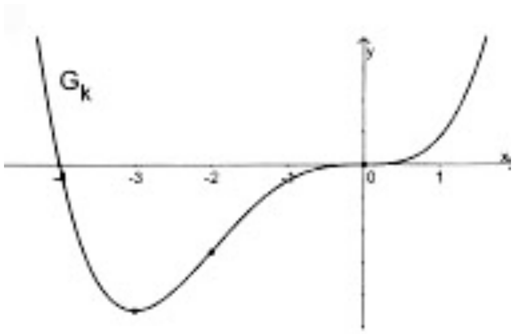
5.1

G_k ist linksgekrümmt in $\left]-\infty;-2\right]$, G_k ist rechtsgekrümmt in $\left[-2;0\right]$ und G_k ist linksgekrümmt in $\left[0;\infty\right[$

$\Rightarrow x=-2$ und $x=0$ Wendestellen

$\Rightarrow x=0$ ist Wendestelle mit waagrechter Tangente $\Rightarrow$ Terrassenstelle

5.2



6.1

$f(x)=-\frac{1}{4}\left(x^3-4x^2-2x+8\right)=0$

$x_1=4$

$\left(x^3-4x^2-2x+8\right):(x-4)=x^2-2$

$x^2-2=0 \;\Rightarrow x_1=-\sqrt{2} \quad x_2=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ f hat Nullstellen bei $x_1=4$ (einfach), bei $x_2=-\sqrt{2}$ (einfach) und bei $x_3=\sqrt{2}$ (einfach);

Skizze von f:

$\Rightarrow$ zwischen -$\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ muss ein TIP liegen und zwischen $\sqrt{2}$ und 4 muss ein HOP liegen;

6.2

$$f'(x) = -\frac{1}{4}\left(3x^2 - 8x - 2\right)$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow 3x^2 - 8x - 2 = 0 \;\Rightarrow x_1 = \frac{4+\sqrt{22}}{3} \approx 2{,}90 \quad x_2 = \frac{4-\sqrt{22}}{3} \approx -0{,}23$$

Skizze von f´:

$$\Rightarrow x_1 = -0{,}23 \text{ TIP} \;\Rightarrow \text{TIP}(-0{,}23/-2{,}06) \qquad x_2 = 2{,}90 \text{ HOP} \;\Rightarrow \text{HOP}(2{,}90/1{,}76)$$

6.3

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\left(6x - 8\right)$$

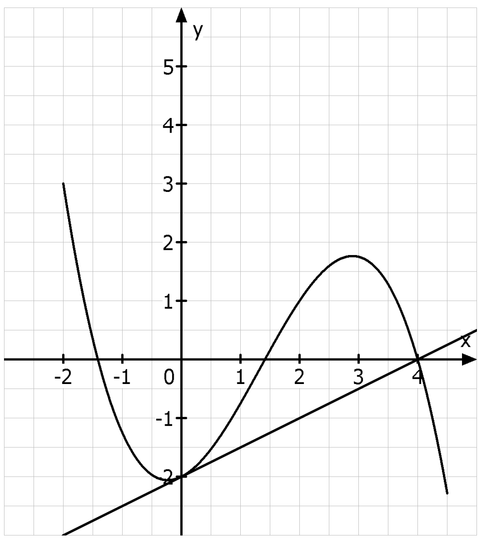
$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow 6x - 8 = 0 \;\Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Skizze von f´´:

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ WP wegen VZW} \quad \Rightarrow \text{WP}\left(\frac{4}{3} / -\frac{4}{27}\right)$$

$$\Rightarrow G_f \text{ linksgekrümmt in } \left]-\infty; \frac{4}{3}\right] \qquad G_f \text{ rechtsgekrümmt in } \left[\frac{4}{3}; \infty\right[$$

6.4



6.5

$S_y(0/-2) \quad P(4/0)$

$m=\frac{-2-0}{0-4}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-2$

$-\frac{1}{4}\left(x^3-4x^2-2x+8\right)=\frac{1}{2}x-2$

$-\frac{1}{4}x^3+x^2+\frac{1}{2}x-2=\frac{1}{2}x-2$

$-\frac{1}{4}x^3+x^2=0 \;\Rightarrow -\frac{1}{4}x^2\left(x-4\right)=0 \;\Rightarrow x_1=0 \quad x_2=4$

$\Rightarrow G_t$ berührt G_f bei x = 0 (wegen doppelter Nullstelle)

6.6

$f(x)-p(x)=-\frac{1}{4}\left(x^3-5x^2\right)$

$-\frac{1}{4}\left(x^3-5x^2\right)=0 \;\Rightarrow x^3-5x^2=0 \;\Rightarrow x^2(x-5)=0$

$\Rightarrow x_1=0$ (doppelt) $\quad x_2=5$ (einf ach)

$\Rightarrow x=0$ Berührstelle von G_f und G_p und $x=5$ Schnittstelle von G_f und G_p

7

$u(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

1) keine Nullstelle

2) eine Nullstelle (vierfach)

3)eine Nullstelle (doppelt)

4) zwei Nullstellen (doppelt)

5) zwei Nullstellen (je einfach)

6) zwei Nullstellen (eine dreifach und eine einfach)

7) drei Nullstellen (zwei einfach und eine doppelt)

8) vier Nullstellen (alle einfach)

8.1

G_f sms in $\left]-\infty;0\right]$ sowie in $\left[4;\infty\right[$

G_f smf in $\left[0;4\right]$

G_f hat bei x = 2 eine Wendestelle, da dort $G_{f'}$ einen
Extrempunkt besitzt.

8.2

Nullstellen:

$f(x)=0 \quad \Rightarrow \frac{1}{6}x^2(x-6)=0 \ \Rightarrow x_{1/2}=0 \ \ x_3=6$

f hat zwei Nullstellen bei x = 0 (doppelt) und bei x = 6 (einfach)

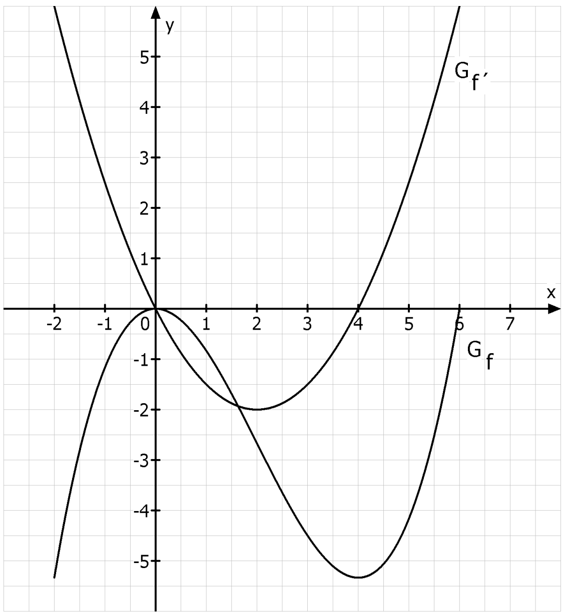
Extrema:

$f'(x)=0 \ \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=4$ (siehe 32.1)

$x_1=0$ HOP $\Rightarrow$ HOP$(0/0)$ $\quad x_2=4$ TIP $\Rightarrow$ TIP$(4/-5\frac{1}{3})$ (siehe 32.1)

Wendepunkt bei $x=-2 \ \Rightarrow$ WP$(-2/-\frac{8}{3})$

8.3



9.1

$x^3+2x^2-7x+4=0 \quad x_1=1$ (durch Probieren)

$\left(x^3+2x^2-7x+4\right):(x-1)=x^2+3x-4$

$x^2+3x-4=0 \ \Rightarrow (x-1)(x+4)=0 \ \Rightarrow x_2=1 \ \ x_3=-4$

$\Rightarrow f_a(x)=a\cdot(x-1)^2(x+4)$

$\Rightarrow f_a$ hat zwei Nullstellen bei x = 1 (doppelt) und bei x = - 4 (einfach)

9.2

$y = mx + t \qquad m = f_a'(-3)$

$f_a'(x) = a \cdot (3x^2 + 4x - 7)$

$f_a'(-3) = a \cdot (27 - 12 - 7) = 8a$

$f_a(-3) = a \cdot (-27 + 18 + 21 + 4) = 16a$

$\Rightarrow y = 8ax + 5$

$\Rightarrow 16a = 8a \cdot (-3) + 5 \;\; \Rightarrow 40a = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

9.3

$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 + 4x + 7)$

$f'(x) = 0 \;\; \Rightarrow 3x^2 + 4x + 7 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-4 \pm 10}{6} \quad \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{7}{3}$

Skizze von f´:

$\Rightarrow G_f$ sms in $\left]-\infty; -\frac{7}{3}\right]$ sowie in $\left[1; \infty\right[$

G_f smf in $\left[-\frac{7}{3}; 1\right]$

$\Rightarrow x = -\frac{7}{3}$ HOP $\;$ HOP$\left(-\frac{7}{3} / \frac{125}{54}\right) \qquad x = 1$ TIP $\;$ TIP$(1/0)$

9.4

$f''(x) = \frac{1}{8}(6x + 4)$

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow 6x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

Skizze von f'':

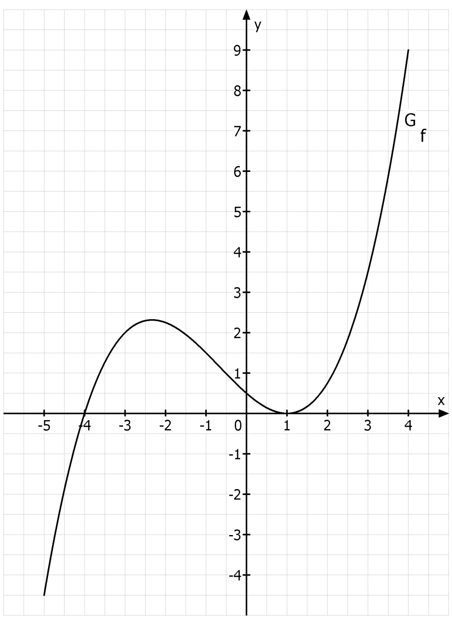
$\Rightarrow x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[$ Tangentensteigungen nehmen ab

$x \in \left]-\frac{2}{3}; \infty\right[$ Tangentensteigungen nehmen zu

$\Rightarrow$ geringste Steigung bei $x = -\frac{2}{3}$

$f'(-\frac{2}{3}) = -1\frac{1}{24} \quad \Rightarrow$ Gefälle $\quad \Rightarrow P(-\frac{2}{3} / \frac{125}{108})$

9.5



10.1

$$-\frac{1}{4}\left(x^3+8x^2+16x\right)=0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{4}x\left(x^2+8x+16\right)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \qquad x^2+8x+16=0 \;\Rightarrow x_{2/3}=-4$$

f hat zwei Nullstellen bei x_1 = 0 (einfach) und bei x_2 = -4 (doppelt)

10.2

$$f'(x)=-\frac{1}{4}\left(3x^2+16x+16\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(3x^2+16x+16\right)=0 \quad \Rightarrow 3x^2+16x+16=0$$

$$\Rightarrow x_1=-4 \qquad x_2=-\frac{4}{3}$$

Skizze von f´:

G_f smf in $\left]-\infty;-4\right]$ $\qquad$ G_f sms in $\left[-4;-\frac{4}{3}\right]$ $\qquad$ G_f smf in $\left[-\frac{4}{3};\infty\right[$

$$\Rightarrow x_1=-4 \;\text{ TIP} \quad \text{TIP}(-4/0) \qquad x_2=-\frac{4}{3}\;\text{ HOP} \quad \text{HOP}\left(-\frac{4}{3}/\frac{64}{27}\right)$$

10.3

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(6x+16)$$

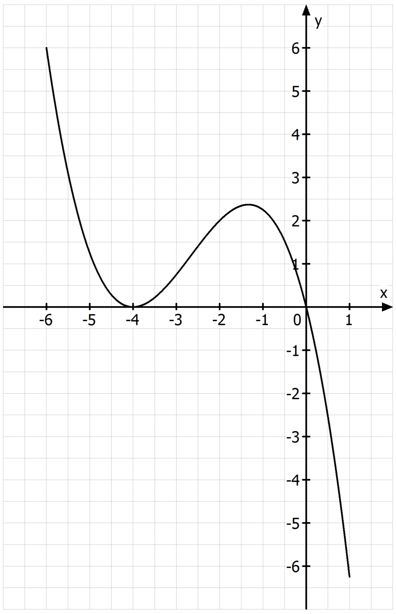
$$-\frac{1}{4}(6x+16)=0 \quad \Rightarrow 6x+16=0 \quad \Rightarrow x=-\frac{8}{3}$$

Skizze von f´´:

$$\Rightarrow x=-\frac{8}{3} \;\text{ Maximum der Steigung}$$

$$\Rightarrow f'\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

10.4



11.1

$$\frac{1}{4}x(tx-1)(x+4)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \quad x_2=\frac{1}{t} \quad x_3=-4 \quad x_4=3$$

$t=0: h_0$ hat drei Nullstellen bei $x_1=0$(einfach), $x_2=-4$(einfach) und $x_3=3$ (einfach)

$t=-0{,}25: h_{-0{,}25}$ hat drei Nullstellen bei $x_1=0$ (einfach), $x_2=-4$ (doppelt) und $x_3=3$ (einfach)

$t=\frac{1}{3}: h_{\frac{1}{3}}$ hat drei Nullstellen bei $x_1=0$ (einfach), $x_2=-4$ (einfach) und $x_3=3$ (doppelt)

$t\in\mathbb{R}\setminus\left\{-0{,}25;0;\frac{1}{3}\right\}: h_t$ hat vier einfache Nullstellen bei $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{t}$, $x_3=-4$ und $x_4=3$

11.2

Graph 1 kann zur Funktionenschar h_t gehören mit t = 0

$$\Rightarrow h_0(x)=-\frac{1}{4}x(x+4)(x-3)$$

Hoch drei Funktion mit negativem Leitkoeffizienten (kommt von oben, geht nach unten)

Graph 2 kann zur Funktionenschar h_t gehören mit t = -0,5

Hoch vier Funktion mit negativem Leitkoeffizienten (kommt von unten, geht nach unten)

Graph 3 kann nicht zur Funktionenschar h_t gehören, weil es bei Null

nie eine doppelte Nullstelle geben kann.

12.1

$$\frac{3}{16}(x+3)(x+\frac{4}{3})(4-x)=0$$

$$\Rightarrow x_1=-3 \quad x_2=-\frac{4}{3} \quad x_3=4$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{16}(x+3)(x+\frac{4}{3})(4-x)\right] \text{ existiert nicht} \qquad f(x)\to+\infty \text{ für } x\to-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3}{16}(x+3)(x+\frac{4}{3})(4-x)\right] \text{ existiert nicht} \qquad f(x)\to-\infty \text{ für } x\to+\infty$$

12.2

$$f(x)=\frac{3}{16}(x+3)(x+\frac{4}{3})(4-x)=\frac{3}{16}\left(x^2+\frac{13}{3}x+4\right)(4-x)=$$

$$=\frac{3}{16}(4x^2+\frac{52}{3}x+16-x^3-\frac{13}{3}x^2-4x)=\frac{3}{16}(-x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{40}{3}x+16)=$$

$$=-\frac{1}{16}(3x^3+x^2-40x-48)$$

12.3

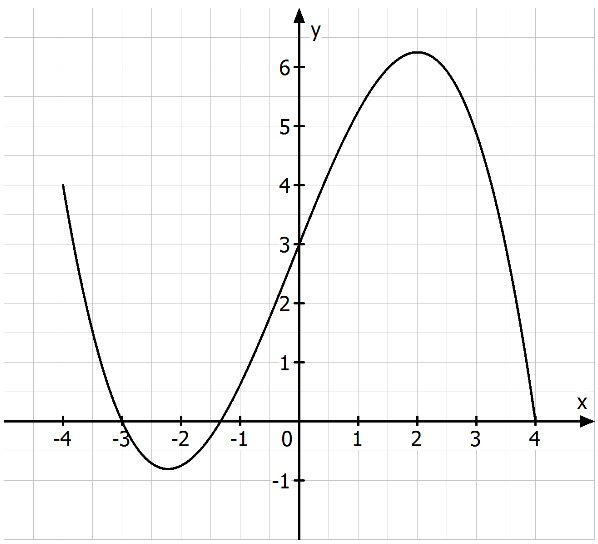
$$f'(x)=-\frac{1}{16}(9x^2+2x-40)$$

$$-\frac{1}{16}(9x^2+2x-40)=0 \quad \Rightarrow 9x^2+2x-40=0 \quad \Rightarrow x_1=-\frac{20}{9} \quad x_2=2$$

Skizze von f':

$$\Rightarrow x_1=-\frac{20}{9} \;\text{ TIP } \quad \text{TIP}\left(-\frac{20}{9}/-\frac{196}{243}\right) \qquad x_2=2 \;\text{ HOP } \quad \text{HOP}(2/6{,}25)$$

12.4



12.5

$S_y(0/3)$

$m = f'(0) = \frac{40}{16} = 2{,}5$

$-\frac{1}{16}(9x^2+2x-40) > 2{,}5 \,\Big|\cdot(-16)$

$9x^2+2x-40 < -40 \quad \Rightarrow 9x^2+2x<0$

$\Rightarrow 9x^2+2x=0 \quad \Rightarrow x(9x+2)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-\frac{2}{9}$

Skizze von $\left(9x^2+2x\right)$:

$\Rightarrow x \in \left]-\frac{2}{9};0\right[$

13.1

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)=\frac{1}{10}\cdot 12 = 1{,}2 \quad \Rightarrow S_y(0/1{,}2)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x)=0$

$\Rightarrow -x^3+15x^2-56x+12=0 \quad \Rightarrow x_1=6$

$\left(-x^3+15x^2-56x+12\right):(x-6) = -x^2+9x-2$

$\Rightarrow -x^2+9x-2=0 \quad \Rightarrow x_2=\frac{9-\sqrt{73}}{2}\approx 0{,}23 \quad x_3=\frac{9+\sqrt{73}}{2}\approx 8{,}77$

$N_1(6/0) \quad N_2\left(\frac{9-\sqrt{73}}{2}/0\right) \quad N_3\left(\frac{9+\sqrt{73}}{2}/0\right)$

13.2

$f'(x)=\frac{1}{10}\left(-3x^2+30x-56\right)$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow -3x^2+30x-56=0$

$\Rightarrow x_1=\frac{-30+\sqrt{228}}{-6}\approx 2{,}5 \quad x_2=\frac{-30-\sqrt{228}}{-6}\approx 7{,}5$

Skizze von f':

$\Rightarrow x_1 = 2{,}5$ HOP $\quad$ HOP$(2{,}5/-5{,}0)$

$x_2 = 7{,}5$ TIP $\quad$ TIP$(7{,}5/1{,}4)$

13.3

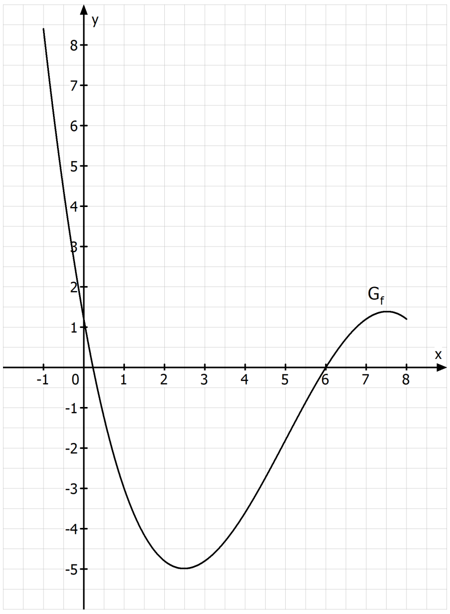
$$f''(x) = \frac{1}{10}(-6x+30)$$

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow -6x+30 = 0 \;\Rightarrow x = 5$$

Skizze von f´´:

$\Rightarrow G_f$ linksgekrümmt in $\left]-\infty;5\right]$ $\quad G_f$ rechtsgekrümmt in $\left[5;\infty\right[$

13.4



14.1

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow -0{,}5x^2(x^2-6) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ (doppelt)} \quad x_2 = -\sqrt{6} \text{ (einfach)} \quad x_3 = \sqrt{6} \text{ (einfach)}$$

$\Rightarrow$ bei x = 0 Berührpunkt mit der x-Achse und bei $x_2 = -\sqrt{6}$

und $x_3 = \sqrt{6}$ Schnittpunkte mit der x – Achse

14.2

$f'(x) = -0{,}5(4x^3 - 12x)$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow 4x^3 - 12x = 0 \;\Rightarrow 4x(x^2 - 3) = 0 \;\Rightarrow x_1 = 0 \;\; x_2 = -\sqrt{3} \;\; x_3 = \sqrt{3}$

Skizze von f':

$\Rightarrow G_f$ ist sms in $\left]-\infty; -\sqrt{3}\right]$ sowie in $\left[0; \sqrt{3}\right]$

G_f ist smf in $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$ sowie in $\left[\sqrt{3}; \infty\right[$

$\Rightarrow x = -\sqrt{3}$ HOP HOP$(-\sqrt{3}; 4{,}5)$

$x = 0$ TIP TIP$(0/0)$

$x = \sqrt{3}$ HOP HOP$(\sqrt{3}; 4{,}5)$

14.3 G_f ist der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades und zwischen den drei Extrema muss jeweils ein Wendepunkt liegen, also damit genau zwei Wendepunkte. Wegen Achsensymmetrie zur y-Achse gilt: $W_2(-1/2{,}5)$.

$f(x) = 2{,}5 \;\Rightarrow -0{,}5(x^4 - 6x^2) = 2{,}5 \;\Rightarrow x^4 - 6x^2 = -5 \;\Rightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = 0$

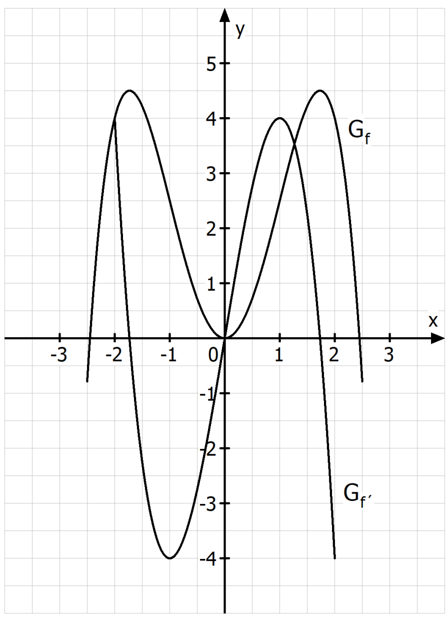
Substitution: $z = x^2$

$\Rightarrow z^2 - 6z + 5 = 0 \;\Rightarrow z_1 = 5 \;\; z_2 = 1$

1) $x^2 = 5 \;\Rightarrow x_1 = -\sqrt{5} \;\; x_2 = \sqrt{5}$

2) $x^2 = 1 \;\Rightarrow x_3 = -1 \;\; x_4 = 1$

14.4



14.5

$f(-2)-f'(-2)=0$

$-0{,}5\left((-2)^4-6(-2)^2\right)+0{,}5\left(4(-2)^3-12(-2)\right)=-0{,}5(-8)+0{,}5(-8)=0$

$-0{,}5\left(x^4-6x^2\right)+0{,}5(4x^3-12x)=0 \;\Rightarrow -0{,}5x^4+2x^3+3x^2-6x=0$

$\Rightarrow x(-0{,}5x^3+2x^2+3x-6)=0 \;\Rightarrow x_1=0$

$-0{,}5x^3+2x^2+3x-6=0 \;\Rightarrow x_2=-2$

$\left(-0{,}5x^3+2x^2+3x-6\right):(x+2)=-0{,}5x^2+3x-3$

$-0{,}5x^2+3x-3=0 \;\Rightarrow x_3=3-\sqrt{3} \quad x_4=3+\sqrt{3}$

An diesen Stellen ist die Steigung des Graphen G_f gleich der zugehörigen y-Koordinate des Punktes.

14.6

Nullstellen von f': $x_1=-\sqrt{3} \quad x_2=0 \quad x_3=\sqrt{3}$

Extremstellen von f': $x_1=-1 \quad x_2=1$

15 Wenn h nur gerade Exponenten hat, dann muss die 1. Ableitungsfunktion nur ungerade Exponenten haben und damit ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

16.1

$f(x)=0 \;\Rightarrow \frac{1}{9}x^3(-x+4)=0$

$x_1=0$ (dreifach) $\quad x_2=4$ (einfach)

16.2

$f'(x)=\frac{1}{9}\left(-4x^3+12x^2\right)=\frac{4}{9}x^2\left(-x+3\right) \quad \Rightarrow \frac{4}{9}x^2\left(-x+3\right)=0$

$\Rightarrow x_1=0 \quad x_2=3$

Skizze von f':

G_f ist sms in $\left]-\infty;3\right] \quad G_f$ ist smf in $\left[3;\infty\right[$

$\Rightarrow x=3$ HOP $\quad$ HOP(3 / 3)

16.3

$$f''(x)=\frac{1}{9}\left(-12x^2+24x\right)=\frac{4}{3}x(-x+2)$$

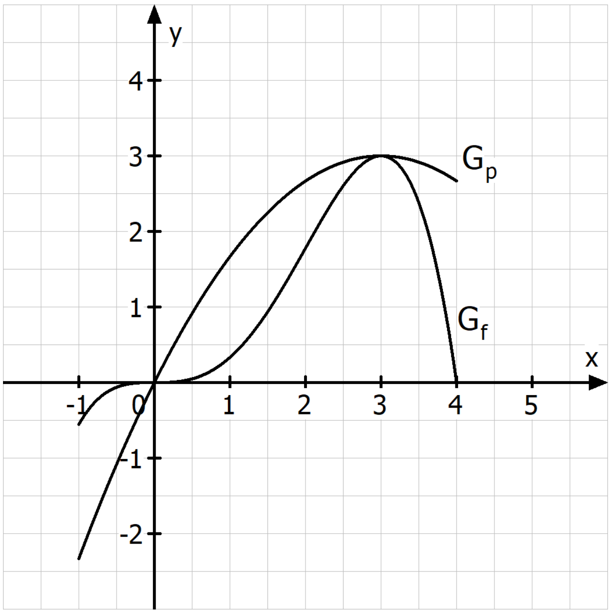
$$\frac{4}{3}x(-x+2)=0 \quad x_1=0 \quad x_2=2 \text{ Wendestellen wegen VZW}$$

$$\text{Tangente 1: WP}(0/0) \;\; f'(0)=0 \quad \Rightarrow t(x)=0$$

$$\text{Tangente 2: WP}(2/\frac{16}{9}) \;\; f'(2)=\frac{16}{9} \qquad \frac{16}{9}=\frac{16}{9}\cdot 2+t \;\; \Rightarrow t=-\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow t(x)=\frac{16}{9}x-\frac{16}{9}$$

16.4



16.5.1

$$p(x)=ax^2+bx+c \qquad p'(x)=2ax+b$$

$$\text{(I)} \;\; p(3)=3 \qquad \Rightarrow 9a+3b=3$$

$$\text{(II)} \;\; f'(3)=p'(3) \quad \Rightarrow 6a+b=0$$

$$\text{(III)} \;\; p(0)=0 \qquad \Rightarrow c=0$$

$$-3\cdot\text{(II)}+\text{(I)}: \; -9a=3 \;\; \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+b=0 \quad \Rightarrow b=2$$

$$\Rightarrow p(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x$$

16.5.2

$p(x)=f(x)$

$\frac{1}{9}x^4-\frac{4}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2+2x=0 \quad \Rightarrow x\cdot\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{3}x+2\right)=0$

$\Rightarrow x_1=0 \quad \frac{1}{9}x^3-\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{3}x+2=0 \quad \Rightarrow x_2=3$ (siehe 41.5.1)

$\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{3}x+2\right):(x-3)=\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3}$

$\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3}=0 \quad \Rightarrow x_{3/4}=\frac{\frac{1}{9}\pm\sqrt{\frac{1}{81}+\frac{8}{27}}}{\frac{2}{9}}=\frac{\frac{1}{9}\pm\frac{5}{9}}{\frac{2}{9}} \quad x_3=3 \quad x_4=-2$

$x=3$ nicht im III. Quadranten $\quad \Rightarrow P(-2/-\frac{16}{3})$

16.5.3

$y=mx+t \quad T(3/4) \quad 4=3m+t \quad \Rightarrow t=4-3m$

$\Rightarrow y=mx+4-3m$

$-\frac{1}{3}x^2+2x=mx+4-3m \quad \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2+2x-mx+3m-4=0$

Berührpunkt $\Rightarrow D=0$

$D=(2-m)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(3m-4)=m^2-\frac{4}{3}=0 \quad \Rightarrow m_1=\sqrt{\frac{4}{3}} \quad m_2=-\sqrt{\frac{4}{3}}$

17.1 G_f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung, weil im Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten auftreten.

17.2

$f(x)=0 \quad \Rightarrow x^4-8x^3+18x^2=0 \quad \Rightarrow x^2\left(x^2-8x+18\right)=0$

$\Rightarrow x_1=0 \quad x^2-8x+18=0 \quad \Rightarrow x_{2/3}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot1\cdot18}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{-8}}{2}$

$\Rightarrow$ f hat eine Nullstelle bei x = 0 (doppelt)

17.3

$x=0$ doppelte Nullstelle von f $\Rightarrow$ x = 0 einfache Nullstelle von f´ $\Rightarrow$ Extrempunkt

Da x = 0 die einzige Nullstelle ist und nach 42.1 $f(x)\to\infty$ für $x\to\pm\infty$ gilt,

muss x = 0 relatives und zugleich absolutes Minimum sein.

17.4

$$f'(x)=\frac{1}{5}\left(4x^3-24x^2+36x\right) \qquad f''(x)=\frac{1}{5}\left(12x^2-48x+36\right)$$

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow 12x^2-48x+36=0 \;\Rightarrow x_1=3 \quad x_2=1$$

Skizze von f'':

$\Rightarrow x_1=3$ und $x_2=1$ Wendepunkte wegen VZW

$f'(3)=0 \quad f'(1)\neq 0 \quad \Rightarrow$ TEP bei $x=3$

WP$(1/2{,}2)$ TEP$(3/5{,}4)$

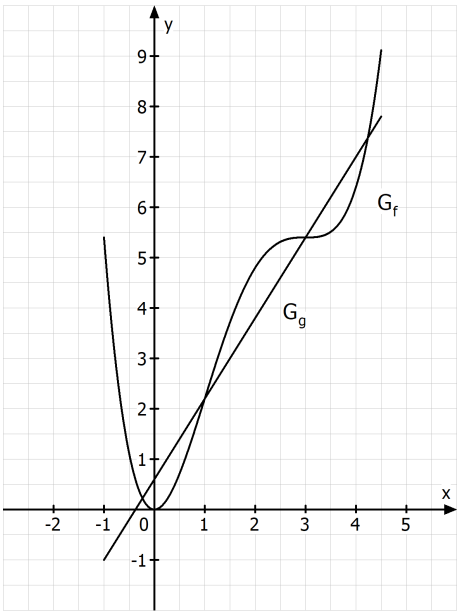
17.5

$$g: y=mx+t \qquad m=\frac{5{,}4-2{,}2}{3-1}=1{,}6$$

$$2{,}2=1{,}6\cdot 1+t \;\Rightarrow t=0{,}6$$

$$\Rightarrow g: y=1{,}6x+0{,}6$$

17.6



18 a) Richtig, da bei x = 1 Nullstelle von f´ und VZW von – auf +.
b) Falsch, da bei x = 4 doppelte Nullstelle von f´ und damit kein Extrempunkt.
c) Richtig, da f´ bei x = 2 eine Extremstelle besitzt.
d) Richtig, da f´(2) = 3, also hat die Tangente die Steigung von 3.

19

$k_a{}'(x)=\frac{1}{9}\left(4x^3-6ax^2\right)$

$k_a{}'(x)=0 \quad \Rightarrow 4x^3-6ax^2=0 \quad \Rightarrow x^2(4x-6a)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=1{,}5a$

Skizze von $k_a{}'$ für $a>0$:

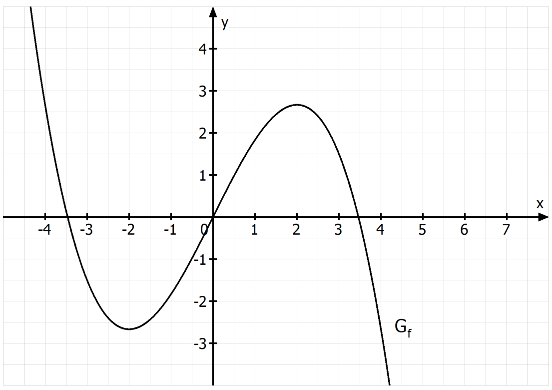
$\Rightarrow x=1{,}5a$ TIP $\quad$ TIP$\left(1{,}5a/-\frac{3}{16}a^4\right)$ $\quad x=0$ kein Extrempunkt

$a=0: k_0{}'(x)=\frac{4}{9}x^3$

Skizze von $k_0{}'$:

$\Rightarrow x=0$ TIP $\quad$ TIP$(0/0)$

20.1



$x\to-\infty \;\Rightarrow\; f(x)\to+\infty \qquad x\to\infty \;\Rightarrow\; f(x)\to-\infty$

20.2 $G_{f'}$ ist eine nach unten geöffnete Parabel.

$G_{f'}$ hat zwei Nullstellen bei x = -2 und x = 2, der Extrempunkt von f' muss bei x = 0 liegen und $G_{f'}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

21.1 G_f hat eine Nullstelle bei 0 und bei x = 0 eine Steigung von 0. G_f hat bei x = -3 einen Funktionswert von -3 und bei x = -3 eine Steigung von -1.

21.2

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$\text{(I)}\quad f(0)=0 \quad \Rightarrow d=0$$

$$\text{(II)}\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f'(0)=0 \quad \Rightarrow c=0$$

$$\text{(III)}\quad f(-3)=-3 \quad \Rightarrow -27a+9b=-3$$

$$\text{(IV)}\quad f'(-3)=-1 \quad \Rightarrow 27a-6b=-1$$

$$\text{(III)}+\text{(IV)} \Rightarrow 3b=-4 \quad \Rightarrow b=-\frac{4}{3}$$

$$\text{(IV)} \Rightarrow 27a+8=-1 \quad \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2$$

22.1

$$w(t)=at^4+bt^3+c$$

$$\text{(I)}\quad w(0)=200 \quad \Rightarrow c=200$$

$$\text{(II)}\quad w(30)=308 \quad \Rightarrow 810000a+27000b+c=308$$

$$\text{(III)}\quad w'(24)=0 \qquad w'(t)=4at^3+3bt^2$$

$$\Rightarrow 55296a+1728b=0$$

$$\text{(II)}\quad 810000a+27000b=108$$

$$\text{(III)}\quad 55296a+1728b=0 \quad \Rightarrow b=-32a$$

$$\text{(II)} \Rightarrow 810000a-864000a=108 \quad \Rightarrow a=-\frac{1}{500}$$

$$\Rightarrow b=-32\cdot\left(-\frac{1}{500}\right)=\frac{8}{125}$$

$$\Rightarrow w(t)=-\frac{1}{500}t^4+\frac{8}{125}t^3+200$$

22.2 $w(24)=421\,\text{cm}$

22.3

$$w'(t) = -\frac{4}{500}t^3 + \frac{24}{125}t^2 \qquad w''(t) = -\frac{12}{500}t^2 + \frac{48}{125}t$$

$$-\frac{12}{500}t^2 + \frac{48}{125}t = 0 \quad \Rightarrow t\cdot\left(-\frac{12}{500}t + \frac{48}{125}\right) \quad \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = 16$$

Skizze von w'':

$\Rightarrow t = 16$ Maximum von w'

Da w' im Bereich $\left[0;30\right]$ nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ absolutes Maximum für $t = 16$

$\Rightarrow$ am 17. März 2010 war die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten.

23.1

$$x^3 + 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

$$\Rightarrow N_1(0|0) \quad N_2(-3|0)$$

23.2

$$g'(x) = 3x^2 + 6x \qquad g''(x) = 6x + 6$$

$$6x + 6 = 0 \quad \Rightarrow x = -1$$

Skizze von g'':

$$\Rightarrow x = -1 \text{ WP} \qquad y_{WP} = g(-1) = 2$$

$$\Rightarrow y = mx + t \quad m = g'(-1) = -3$$

$$\Rightarrow 2 = -3\cdot(-1) + t \quad \Rightarrow t = -1 \quad \Rightarrow y = -3x - 1$$

24.1

G_f ist in $\left]-\infty;-1\right]$ sms, da $f'(x) \geq 0$

G_f ist in $\left[-1;2\right]$ smf, da $f'(x) \leq 0$

G_f ist in $\left[2;\infty\right[$ sms, da $f'(x) \geq 0$

$f'(-1) = 0 \quad$ VZW $+ \to - \quad \Rightarrow$ Maximalstelle

$f'(2) = 0 \quad$ VZW $- \to + \quad \Rightarrow$ Minimalstelle

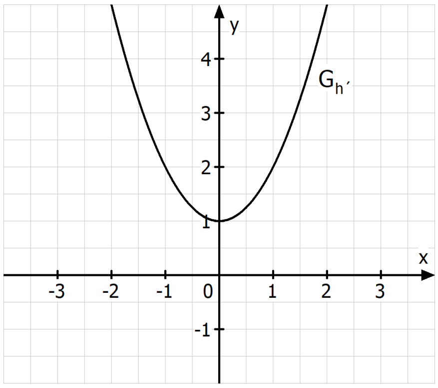
G_f geht von links unten nach rechts oben und deshalb gibt es Funktionswerte, die größer bzw. kleiner sind als die Funktionswerte der Extrempunkte.

24.2

$x = 0{,}5 \quad \left(x - \text{Koordinate des TIP von } G_{f'}\right)$

$f'(0{,}5) < 0 \quad \Rightarrow$ die Wendetangente fällt

25



$h'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow G_h$ steigt auf ganz $\mathbb{R}$ und ist eine Funktion dritten Grades

$\Rightarrow$ h hat genau eine Nullstelle

$h(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$

26

Wendestellen: $x_1 = 1 \quad x_2 = 4$

g'' hat zwei Nullstellen mit VZW $\quad \Rightarrow g''$ hat mindestens Grad 2

$\Rightarrow$ g hat mindestens Grad 4

Laut Angabe hat die Funktion höchstens Grad 5, aber dann hätte

g'' Grad 3. Eine Funktion vom Grad 3 kann nur eine einfache, eine einfache und

eine doppelte oder drei einfache Nullstellen haben und somit kann

g nicht den Grad 5 haben.

g hat Grad 4;

27.1

Nullstellen: $\frac{1}{2}\left(x^3 - 3x - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1$

$\left(x^3 - 3x - 2\right) : \left(x + 1\right) = x^2 - x - 2$

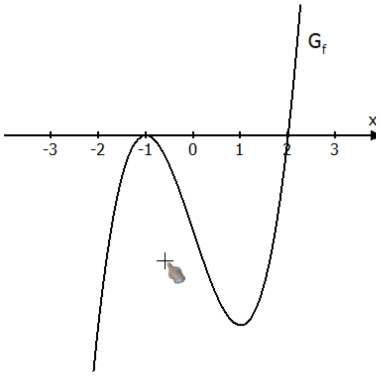
$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 2 \quad x_3 = -1$

$\Rightarrow N_1\left(2|0\right) \quad N_2\left(-1|0\right)$

Schnittpunkt mit der $y -$ Achse:

$y = \frac{1}{2}\left(0^3 - 3 \cdot 0 - 2\right) = -1 \quad \Rightarrow S_y\left(0|-1\right)$

27.2



$\Rightarrow$ f besitzt zwei Extremstellen

$\Rightarrow f'$ besitzt zwei Nullstellen mit VZW und damit zwei einfache Nullstellen, weil f' eine quadratische Funktion ist.

28 Aussage A falsch, weil h(-3) = 1 sein müsste.

Aussage B falsch, weil Steigung bei x = 2 die Steigung von g ist und auf jeden Fall kleiner als 2 ist.

29.1

$x_1 = -2$ (dreifach) $\quad x_2 = 1$ (einfach)

$f(x) = a \cdot (x+2)^3 \cdot (x-1)$

$f(0) = 2 \quad \Rightarrow a \cdot 2^3 \cdot (-1) = 2 \quad \Rightarrow a = -0{,}25$

$\Rightarrow f(x) = -0{,}25 \cdot (x+2)^3 \cdot (x-1)$

29.2

a) Falsch. $f'(0) > 0$

b) Richtig. G_f bei x = 1 rechtsgekrümmt.

c) Richtig. G_f hat bei x = -2 Terrassenstelle.

d) Falsch. G_f hat einen absoluten Hochpunkt.

30.1 $x_1 = -1$ HOP $\quad x_2 = 2$ TEP

30.2

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

Wendestellen sind die Extremstellen von g'.

31.1

$f^{/}(x) = -4{,}5x^2 + 2$

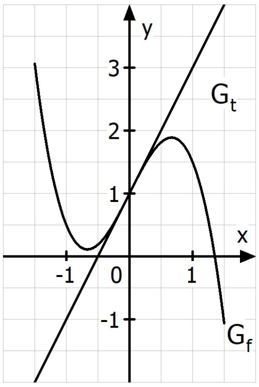
$\Rightarrow -4{,}5x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3}$

Skizze von $f^{/}$:

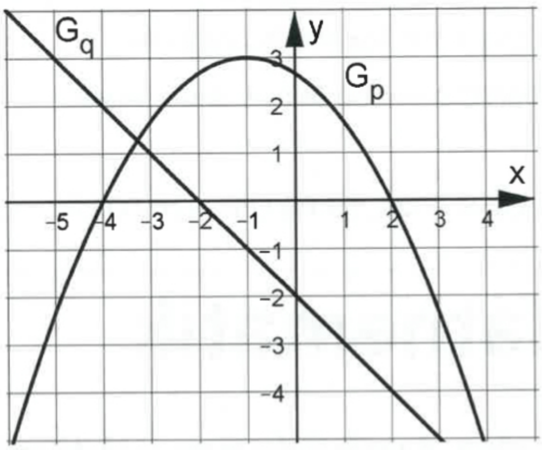
$\Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$ TIP $\quad$ TIP$\left(-\frac{2}{3} \middle| \frac{1}{9}\right)$ $\qquad x_2 = \frac{2}{3}$ HOP $\quad$ HOP$\left(\frac{2}{3} \middle| \frac{17}{9}\right)$

Da beide Extrempunkte oberhalb der x-Achse liegen und f eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist, kann f nur eine einfache Nullstelle besitzen.

31.2



32



	$\frac{1}{4}(x+1)^2+3$
	$-\frac{1}{3}(x-1)^2+3$
X	$-\frac{1}{3}(x-2)(x+4)$
	$-\frac{1}{4}(x+2)(x-4)$
	$-\frac{1}{4}x^2-4x+2$
	$-2x-2$
	$-\frac{1}{2}(x+2)$
	$2-x$
X	$-x-2$
	$x+2$

33

$$a(x)=-\frac{1}{4}(x-4)^2+2 \qquad S(4|2) \qquad a(0)=-2 \qquad a(4)=2 \quad \Rightarrow W_a=[-2;2]$$

$$b(x)=\frac{1}{4}(x^2-4)^2 \qquad \Rightarrow W_b=[0;\infty[$$

34

$$x=1 \quad TIP(1|0) \quad \text{wegen } h(1)=0 \quad h'(1)=0 \quad h''(1)=2>0$$

$$x=2 \quad WP(2|1) \quad \text{wegen } h(2)=0 \quad h''(2)=0 \quad h'''(2)=1\neq 0$$

35

Genau ein Wendepunkt $\Rightarrow$ die zweite Ableitung müsste eine Nullstelle mit VZW haben. Bei einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist der Graph der zweiten Ableitung einer Parabel, die aber nie nur eine Nullstelle mit VZW besitzen kann $\Rightarrow$ Aussage falsch.

36.1

$$\text{Symmetrie: } f(-x)=\frac{1}{9}\left[(-x)^2-9\right]\left[(-x)^2+1\right]=\frac{1}{9}(x^2-9)(x^2+1)=f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$$x\to -\infty \qquad \frac{1}{9}\underbrace{(x^2-9)}_{\to+\infty}\underbrace{(x^2+1)}_{\to+\infty}\to+\infty$$

$$x\to +\infty \qquad \frac{1}{9}\underbrace{(x^2-9)}_{\to+\infty}\underbrace{(x^2+1)}_{\to+\infty}\to+\infty$$

36.2

$$f(x)=0 \qquad \Rightarrow (x^2-9)(x^2+1)=0$$

$$\Rightarrow x^2-9=0 \quad \Rightarrow x_1=-3 \qquad x_2=3 \qquad\qquad x^2+1=0 \ \ (f)$$

$$f(x)>0 \qquad \frac{1}{9}(x^2+1) \quad \text{immer positiv}$$

Skizze von (x^2-9):

$$\Rightarrow x\in\,]-\infty;-3] \cup\,]3;\infty[$$

36.3

$f'(x)=\frac{1}{9}\left(4x^3-16x\right)$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow 4x^3-16x=0 \quad \Rightarrow 4x\left(x^2-4\right)=0$

$x_1=0 \quad x^2-4=0 \ \Rightarrow x_2=-2 \quad x_3=2$

Skizze von f':

$\Rightarrow x=-2$ TIP $\quad TIP\left(-2|-\frac{25}{9}\right) \quad x=0$ HOP $\quad HOP\left(0|-1\right) \quad x=2$ TIP $\quad TIP\left(2|-\frac{25}{9}\right)$

$\Rightarrow W_f=\left[-\frac{25}{9}|\infty\right[$

37.1

$f'(x)=3x^2-4x \qquad f''(x)=6x-4$

$f''(x)=0 \quad \Rightarrow 6x-4=0 \quad \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

Skizze von f'':

$\Rightarrow x=\frac{2}{3}$ Minimum von f'

$x=\frac{2}{3}$ absolutes Minimum von f', weil im Definitionsbereich nur ein Monotoniewechsel vorliegt.

$f'\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}<0 \quad \Rightarrow$ stärkstes Gefälle

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{65}{27} \quad \Rightarrow P\left(\frac{2}{3}|\frac{65}{27}\right)$

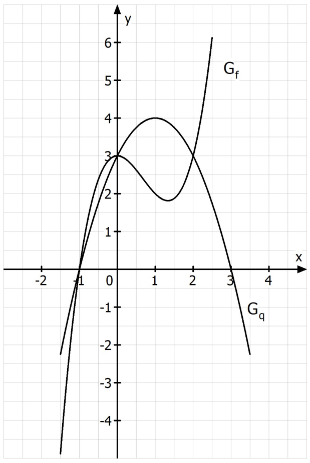
37.2

$x^3-2x^2+3=-x^2+2x+3 \quad \Rightarrow x^3-x^2-2x=0 \quad \Rightarrow x\left(x^2-x-2\right)=0$

$\Rightarrow x_1=0 \quad x^2-x-2=0 \ \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \quad \Rightarrow x_2=2 \quad x_3=-1$

$SP_1\left(0|3\right) \quad SP_2\left(2|3\right) \quad SP_3\left(-1|0\right)$

37.3



38 a) Falsch. G_h sms in $\left[0;\infty\right[$

b) Wahr. h hat bei x = -2 eine doppelte Nullstelle

c) Falsch. $h(-2)=0 \quad h'(0)=0 \quad \Rightarrow h(-2)+h'(0)=0$

39.1

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^3+4x$$

$$-\frac{1}{2}x^3+4x=0 \quad \Rightarrow x\left(-\frac{1}{2}x^2+4\right)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \qquad -\frac{1}{2}x^2+4=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x_2=-\sqrt{8} \quad x_3=\sqrt{8}$$

Skizze von f':

$$\Rightarrow G_f \text{ sms in } \left]-\infty;-\sqrt{8}\right] \text{ sowie in } \left[0;\sqrt{8}\right]$$

$$G_f \text{ smf in } \left[-\sqrt{8};0\right] \text{ sowie in } \left[\sqrt{8};\infty\right[$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{8} \text{ HOP } \quad HOP\left(-\sqrt{8}\,|\,8\right) \qquad x=0 \text{ TIP } \quad TIP\left(0\,|\,0\right) \qquad x=\sqrt{8} \text{ HOP } \quad HOP\left(\sqrt{8}\,|\,8\right)$$

$$\Rightarrow W_f=\left]-\infty;8\right]$$

39.2

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{8}{3}} \quad x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Skizze von f'':

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{8}{3}} \text{ WP} \quad x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \text{ WP}$$

Da f' eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit negativem Leitkoeffizienten ist, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, kann es keine Stellen mit maximaler bzw. minimaler Steigung geben.

39.3

Tangente: $y = mx + t$

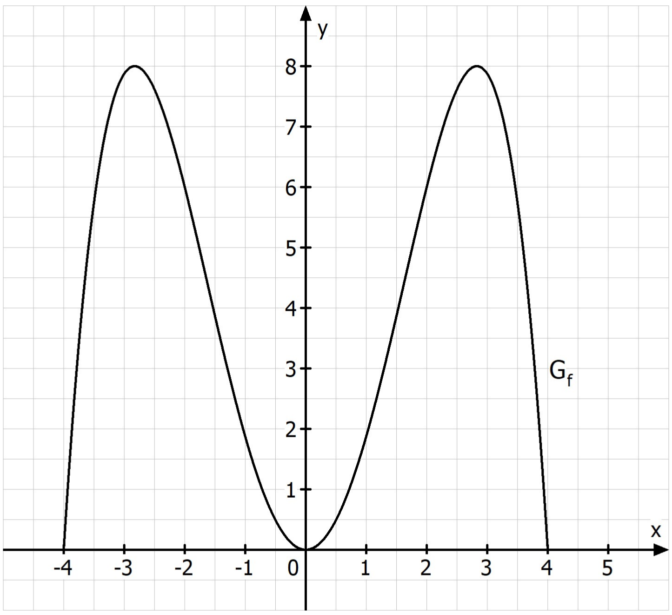
$$m = f'(-2) = -\frac{1}{2}\cdot(-2)^3 + 4\cdot(-2) = 4 - 8 = -4$$

$$P(-2 \mid y_P) \quad y_P = -\frac{1}{8}\cdot(-2)^4 + 2\cdot(-2)^2 = -2 + 8 = 6$$

$$\Rightarrow 6 = -4\cdot(-2) + t \quad \Rightarrow t = -2$$

$$\Rightarrow y = -4x - 2$$

39.4



40.1 $x_1 = 0$ einfach $\quad x_2 = 10$ doppelt $\quad x_3 = 24$ einfach

40.2

$$f(x) = -\frac{1}{100}x\left(x^2 - 20x + 100\right)(x - 24) =$$
$$= -\frac{1}{100}x\left(x^3 - 24x^2 - 20x^2 + 480x + 100x - 2400\right) =$$
$$= -\frac{1}{100}\left(x^4 - 24x^3 - 20x^3 + 480x^2 + 100x^2 - 2400x\right) =$$
$$= -\frac{1}{100}\left(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x\right)$$

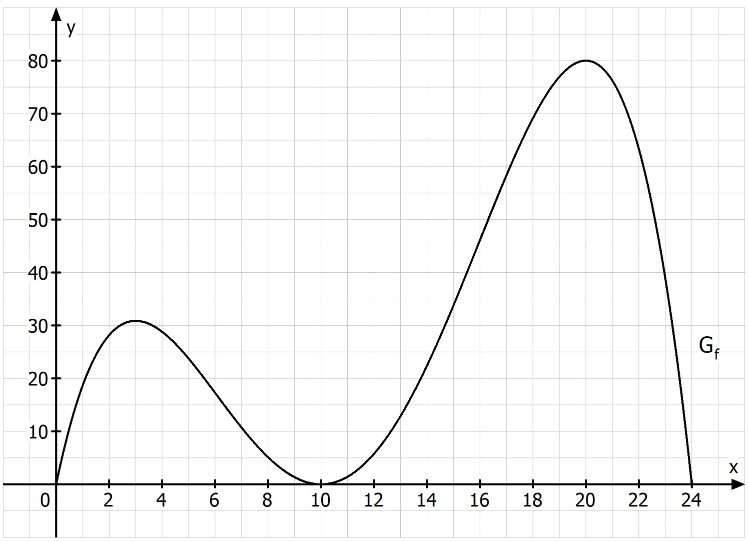
40.3

$$f'(x) = -\frac{1}{100}\left(4x^3 - 132x^2 + 1160x - 2400\right)$$
$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow 4x^3 - 132x^2 + 1160x - 2400 = 0 \;\Rightarrow x_1 = 3 \text{ durch Probieren}$$
$$\left(4x^3 - 132x^2 + 1160x - 2400\right) : (x - 3) = 4x^2 - 120x + 800$$
$$4x^2 - 120x + 800 = 0 \;\Rightarrow x_{2/3} = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 4 \cdot 4 \cdot 800}}{8} = \frac{120 \pm 40}{8}$$
$$\Rightarrow x_2 = 20 \quad x_3 = 10$$

Skizze von f':

$$\Rightarrow x = 3 \text{ HOP } \; HOP(3|30,87) \quad x = 10 \text{ TIP } \; TIP(10|0) \quad x = 24 \text{ HOP } \; HOP(20|80)$$
$$\Rightarrow W_f = \left]-\infty; 80\right]$$

40.4



41.1

Der Delfin springt nach 5,3 Sekunden aus dem Wasser und taucht nach 7 Sekunden wieder ins Wasser ein.

Die angegebene Definitionsmenge macht keinen Sinn, da für $t \to \infty$ $T(t) \to -\infty$ gilt, aber eine unendliche Tauchtiefe macht keinen Sinn.

41.2

$$T(t) = -\frac{1}{12}(x-1)^2(x-7)(x-a)$$

$$S\left(0 \middle| -\frac{28}{9}\right) \Rightarrow -\frac{28}{9} = -\frac{1}{12}\cdot 1\cdot(-7)\cdot(-a) \Rightarrow -\frac{28}{9} = -\frac{7}{12}a \Rightarrow a = \frac{16}{3}$$

42.1

$x_1 = 3$ (doppelt) $\qquad x_2 = -\frac{2}{3}$ (einfach)

Skizze von h:

$\Rightarrow$ der lokale Hochpunkt liegt im Intervall $\left]-\frac{2}{3};3\right[$

42.2 Die Funktion k ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit positivem Leitkoeffizienten, d.h. die Ableitungsfunktion muss eine nach oben geöffnete Parabel sein $\Rightarrow G_c$.

43.1

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2\left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)}}{-1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-1} = -2$$

43.2

$f'(x) = -2x^3 - 6x^2 - 4x \qquad -2x^3 - 6x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow x(-2x^2 - 6x - 4) = 0$

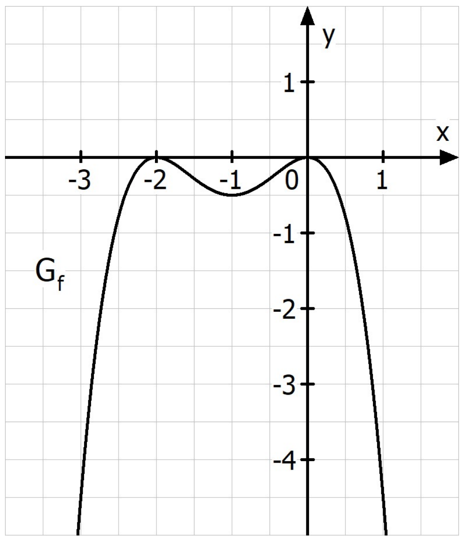
$\Rightarrow x_1 = 0 \qquad -2x^2 - 6x - 4 = 0 \quad \Rightarrow x_{2/3} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4)}}{-4} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{-4} = \dfrac{6 \pm 2}{-4}$

$\Rightarrow x_2 = -2 \quad x_3 = -1$

Skizze von f':

$\Rightarrow x = -2 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(-2|0) \quad x = -1 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(-1|-0{,}5) \quad x = 0 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(0|0)$

43.3



44.1

$g(x) = mx + t$

$m = f'(0)$

$f'(x) = \dfrac{1}{8}(3x^2 - 14x + 8) \qquad \Rightarrow f'(0) = 1$

$\Rightarrow g(x) = x + t$

$P(0|2) \Rightarrow g(x) = x + 2$

44.2

$\dfrac{1}{8}(3x^2 - 14x + 8) = -2 \qquad \Rightarrow 3x^2 - 14x + 8 = -16 \qquad \Rightarrow 3x^2 - 14x + 24 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{6} = \dfrac{14 \pm \sqrt{-92}}{6}$

$\Rightarrow$ es gibt keinen Punkt von G_f mit der Steigung m = -2

44.3

$f''(x)=\frac{1}{8}(6x-14) \quad \frac{1}{8}(6x-14)=0 \;\Rightarrow 6x-14=0 \;\Rightarrow x=\frac{7}{3}$

Skizze von f'' :

$\Rightarrow x=\frac{7}{3}$ WP $\quad$ $WP\left(\frac{7}{3}\middle|\frac{125}{108}\right)$